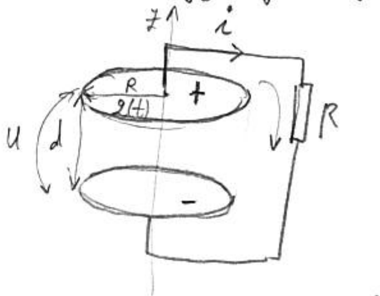
Кондензатор се састоји из две паралелне кружне плоче полупречника R, на растојању d. У тренутку $t=0$ кондензатор је на напону U_0, а отада се облоге кондензатора празне преко отпора R. Занемарујући ефекте крајева одредити:

а) електрично и магнетно поље унутар кондензатора

б) Поинтингов вектор

в) енергију која изађе кроз бочну страну кондензатора за време његовог разелектрисавања.



$q(t)$ наелектрисање на „+" плочи $\quad i = -\frac{dq}{dt}$ (јер $q \downarrow$)

$u(t)$ напон на кондензатору у тренутку t

$$u(t) = iR = -\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}} \quad /\int$$

$$\ln\left(\frac{q(t)}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \qquad q = U\cdot C \Rightarrow \boxed{U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$\tau = RC$ временска константа R-C кола

унутар кондензатора тражимо $\vec{E}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;/\mathrm{rot} \qquad \mathrm{rot\,rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad\,div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0; \quad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$ таласна једначина за електрично поље.

Занемарују се ефекти крајева, па претпостављамо решење као $\boxed{\vec{E} = E(r_c, z)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z}$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E(r_c, z)}{\partial z} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow E(r_c, z) \equiv E(r_c)$$

$\boxed{\vec{E} = E(r_c)\, e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z}$ заменимо у таласну једначину

$$\Delta\vec{E} = \Delta E(r_c)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z = \frac{1}{r_c}\frac{d}{dr_c}\left(r_c\frac{dE}{dr_c}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z \qquad \left(\Delta f = \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c\frac{\partial f}{\partial r_c}\right) + \frac{1}{r_c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_c}\frac{d}{dr_c}\left(r_c\frac{dE}{dr_c}\right)\cancel{e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z} - \frac{1}{c^2\tau^2}E(r_c)\,\cancel{e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2E}{dr_c^2} + \frac{1}{r_c}\frac{dE}{dr_c} - \frac{1}{c^2\tau^2}E = 0} \quad \text{смена: } \boxed{r_c = c\tau\cdot x} \Rightarrow \left(\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dE}{dx} - E\right)\cancel{\frac{1}{c^2\tau^2}} = 0$$

$\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dE}{dx} - E = 0$ Модификована Беселова једначина, решење модификоване Беселове ф-је:

Решење тражимо у облику суме реда $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n = E(x)$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}; \quad \frac{1}{x}\frac{dE}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-2} = \frac{\alpha_1}{x} + \sum_{\substack{n=2 \\ n-2=n'}}^{\infty} n\alpha_n x^{n-2} = \boxed{\frac{\alpha_1}{x} + \sum_{n'=0}^{\infty}(n'+2)\alpha_{n'+2}x^{n'}}$$

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \sum_{\substack{n=2 \\ n-2=n'}}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-2} = \boxed{\sum_{n'=0}^{\infty}(n'+2)(n'+1)\alpha_{n'+2}x^{n'}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\alpha_{n+2}x^n + \frac{\alpha_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\alpha_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left[(n+2)(n+1) + (n+2)\right]\alpha_{n+2} - \alpha_n\right)x^n + \frac{\alpha_1}{x} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)^2\alpha_{n+2} - \alpha_n\right]x^n + \frac{\alpha_1}{x} = 0$$

Чланови уз свако x^n морају бити нула.

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \quad (n+2)^2 \alpha_{n+2} = \alpha_n \quad \forall n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+2} = \frac{\alpha_n}{(n+2)^2} \text{ за } n = 2,3,\dots$$

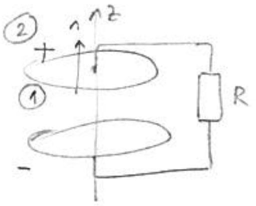
$$\alpha_{2k+1} = \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k+1)^2} = \dots = \frac{\alpha_1}{(2k+1)^2\cdots 3^2} = \frac{\alpha_1}{((2k+1)!!)^2} = 0$$

$$\alpha_{2k} = \frac{\alpha_{2k-2}}{(2k)^2} = \dots = \frac{\alpha_2}{(2k)^2\cdots 4^2} = \frac{\alpha_0}{(2k)^2(2k-2)^2\cdots 4^2 2^2} = \frac{\alpha_0}{(2k!!)^2} = \frac{\alpha_0}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$\Rightarrow E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad x = \frac{r_c}{c\tau}$$

$$E(r_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n} \qquad \boxed{\vec E = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_z}$$

Треба да одредимо константу α_0!



Гранични услов: $E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$E_2 = 0$ нема поља ван кондензатора

$$-E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_z = \boxed{E(r_c)e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \qquad \text{знамо } q(t) = \int \sigma dS = \int_0^a\int_0^{2\pi} \sigma r_c dr d\varphi$$

$$\int_0^a\int_0^{2\pi} \underbrace{E(r_c)e^{-\frac{t}{\tau}}} \cdot r_c dr_c d\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\sigma r_c dr_c d\varphi = -\frac{q(t)}{\varepsilon_0} = -\frac{q_0}{\varepsilon_0}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_0 C}{\varepsilon_0}\underbrace{e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^a\int_0^{2\pi} E(r_c) r_c dr_c d\varphi = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0} \Rightarrow \alpha_0 \int_0^a\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n} r_c dr_c \underbrace{d\varphi} = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0}$$

$$\alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{(c\tau)^{2n}}\cdot 2\pi \int_0^a r_c^{2n+1} dr_c = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi\alpha_0\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{(c\tau)^{2n}}\frac{a^{2n+2}}{2n+2} = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0} \Rightarrow a^2\pi\alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n} = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_0 = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0 a^2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}\right)^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E = -\frac{U_0C}{\varepsilon_0 a^2\pi}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}} e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_z} \qquad C = \varepsilon_0\frac{S}{d} = \varepsilon_0\frac{a^2\pi}{d} \Rightarrow \varepsilon_0 a^2\pi = Cd$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E = -\frac{U_0}{d}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}} e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_z} \approx -\frac{U_0}{d}\frac{1+\left(\frac{r_c}{2c\tau}\right)^2}{1+\frac12\left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_z = \boxed{-\frac{U_0}{d}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_z}$$

први ред по $\frac{a}{c\tau}$!

Треба још одредити $\vec B$! $\quad \vec B = B(r_c,z)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec e_\varphi$

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} = \frac{1}{\tau}B(r_c,z)\vec e_\varphi e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec E = \left(\frac{1}{r_c}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\vec e_{r_c} + \left(\frac{\partial E_{r_c}}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r_c}\right)\vec e_\varphi + \frac{1}{r_c}\left(\frac{\partial(r_cE_\varphi)}{\partial r_c} - \frac{\partial E_{r_c}}{\partial\varphi}\right)\vec e_z = -\frac{\partial E_z}{\partial r_c}\vec e_\varphi = \frac{U_0}{d}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}(n!)^2}\frac{r_c^{2n-1}}{(c\tau)^{2n}}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}}\vec e_\varphi$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{U_0}{d}\,\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n-1}\frac{1}{c\tau}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi = \frac{U_0}{dc\tau}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}n!(n+1)!}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n+1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\tau}\vec{B}$$

$n-1=n$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{U_0}{dc}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)!n!}\left(\frac{r_c}{c\tau}\right)^{2n+1}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^{2n}}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi \approx \frac{U_0}{dc}\,\frac{1}{2}\,\frac{r_c}{c\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi = \boxed{\frac{U_0}{2dc^2\tau}\,r_c\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi}$$

б) Поинтингов вектор

$$\vec{S}_p = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \approx \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{U_0}{d}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_z\right)\times\frac{U_0}{2dc^2\tau}\,r_c\,e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{U_0^2}{2\mu_0 d^2c^2\tau}\,r_c\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\vec{e}_{r_c} = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2\tau}\,r_c\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\vec{e}_{r_c}$$

в) Поинтингова теорема:
$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_\alpha \varepsilon_\alpha}_{\text{ен. наелектрисаних честица слободних и споља унетих}} + \overbrace{\boxed{\int\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)dV}}^{W}\Big) + \oint \vec{S}_p\, d\vec{S} = 0$$

W - енергија поља ЕМ

Први члан = 0 нема наелектрисања унутар кондензатора

$$\frac{dW}{dt} = -\oint\vec{S}_p\,d\vec{S} \quad /\cdot dt$$

$$dW = -\oint\vec{S}_p\,d\vec{S}\,dt \Rightarrow \overset{0}{\cancel{W(t\to\infty)}} - W(t=0) = -\int_0^\infty\left(\oint\vec{S}_p\,d\vec{S}\right)dt$$

$W(t\to\infty)$ енергија ЕМ поља када се разелектрише кондензатор

$W(t=0)$ почетна енергија ЕМ поља

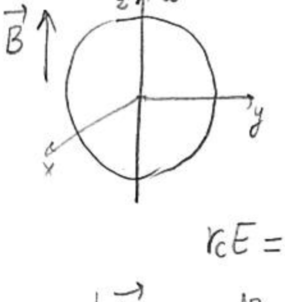
$$W_0 = \underbrace{\int_0^\infty\oint\vec{S}_p\,d\vec{S}\,dt}_{\text{енергија која излази „кроз бочну страну кондензатора"}}$$

$$\oint\vec{S}_p\,d\vec{S} = \int_0^d\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon_0U_0^2}{2d^2\tau}\,a\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\vec{e}_{r_c}\cdot a\,d\varphi\,dz\,\vec{e}_{r_c} = \frac{\varepsilon_0U_0^2a^2\cancel{2}\pi\cancel{d}}{\cancel{2}d^{\cancel{2}}\tau}e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

$$\int_0^\infty\oint\vec{S}_p\,d\vec{S} = \frac{\varepsilon_0U_0^2a^2\pi}{\tau d}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{\varepsilon_0U_0^2a^2\pi}{\cancel{\tau}d}\left(-\frac{\cancel{\tau}}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{\overbrace{\varepsilon_0 a^2\pi}^{C}\,U_0^2}{2d} = \frac{CU_0^2}{2} \text{ - енергија кондензатора}$$

Ова енергија се ослободи као топлота на отпорнику.

Кугла је хомогено наелектрисана наелектрисањем Q и има масу m. У тренутку $t=0$ укључи се магнетно поље $\vec{B}=\vec{B}(t)$, које је константног смера и $\vec{B}(0)=0$. Зависност $\vec{B}$ од координата у области кугле се може занемарити. Наћи угаону брзину кугле, ако се занемари повратни ефекат ротације наелектрисане кугле на магнетно поље.



$\vec{B} = B(t)\cdot\vec{e}_z$ ово поље генерише вртложно електрично поље: $\vec{E} = E(r_c, z)\,\vec{e}_\varphi$

цилиндричне координате: $\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial z}\vec{e}_{r_c} + \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial r_c}(r_cE)\vec{e}_z = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{dB}{dt}\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial E}{\partial z} = 0} \quad \frac{1}{r_c}\frac{d}{dr_c}(r_cE) = -\frac{dB}{dt} \Rightarrow d(r_cE) = -\frac{dB}{dt}r_c\,dr_c \quad /\int$$

$$r_cE = -\frac{dB}{dt}\frac{r_c^2}{2} + C \Rightarrow E = -\frac{dB}{dt}\frac{r_c}{2} + \underset{0}{\cancel{\frac{C}{r_c}}}$$ да E не дивергира у $r_c=0$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{dB}{dt}\frac{r_c}{2}\vec{e}_\varphi}$$

Рачунамо момент силе $\bar{B}$ и $\bar{E}$ на лопту:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \int(\vec{r}\times\vec{F})\,dV = \int \vec{r}\times\left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right)dV$$

$$\rho = const = \frac{q}{\frac{4}{3}R^3\pi} \qquad \vec{j} = j\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{M} = \int\left(r_c\vec{e}_{r_c} + z\vec{e}_z\right)\times\left(\rho E\vec{e}_\varphi + j\vec{e}_\varphi\times B\vec{e}_z\right)dV = \int\left(r_c\vec{e}_{r_c} + z\vec{e}_z\right)\times\left(\rho E\vec{e}_\varphi + jB\vec{e}_{r_c}\right)dV$$

$$= \int\Big(\underbrace{r_c}_{r\sin\theta}\rho E\,\vec{e}_z - \underbrace{z}_{r\cos\theta}\rho E\,\underbrace{\cancel{\vec{e}_{r_c}}}_{\to 0} + \underbrace{z}_{r\cos\theta} jB\,\underbrace{\cancel{\vec{e}_\varphi}}_{\to 0}\Big)\underbrace{r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{dV} = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r\sin\theta\,\rho\cdot\left(-\frac{dB}{dt}\frac{r\sin\theta}{2}\right)\vec{e}_z\, r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

не зависи од φ

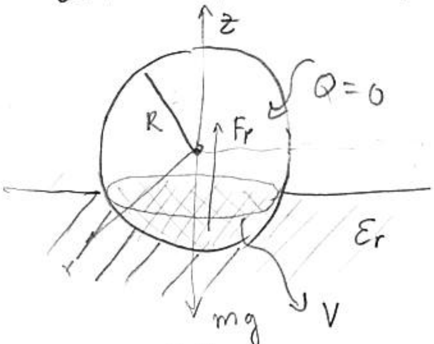
$$= \rho\cdot\cancel{2}\pi\,\vec{e}_z\left(-\frac{dB}{dt}\right)\cancel{\frac{1}{2}}\int_0^R r^4\,dr\int_0^\pi \underbrace{\sin^3\theta\, d\theta}_{(1-\cos^2\theta)\,d\cos\theta} = \rho\pi\,\vec{e}_z\left(-\frac{dB}{dt}\right)\frac{R^5}{5}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{q}{\cancel{\frac{4}{3}}R^3\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\,\vec{e}_z\left(-\frac{dB}{dt}\right)\frac{R^5}{5}\cancel{\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{dB}{dt}\,\frac{qR^2}{5}\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_z = -\frac{dB}{dt}\frac{qR^2}{5}\vec{e}_z \Rightarrow \overbrace{\frac{2}{5}R^2 m}^{I}\cdot\frac{d\omega}{dt} = -\frac{qR^2}{5}\frac{dB}{dt} \Rightarrow$$

$$\omega(t) - \underbrace{\cancel{\omega(0)}}_{0} = -\frac{q}{2m}\left(B(t) - \underbrace{\cancel{B(0)}}_{0}\right) \Rightarrow \boxed{\omega(t) = -\frac{q}{2m}B(t)} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}(t)}$$

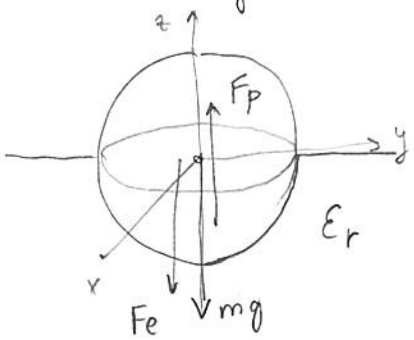
Метална кугла полупречника R плива у диелектрику релативне диелектричне пропустљиво-сти ε_r и густине ρ, тако да јој је центар изнад површине течности. Коликим наелектри-сањем треба наелектрисати куглу да би јој центар био у нивоу течности? Маса кугле је m.



Ненаелектрисана кугла плива у диелектрику са центром изнад површине течности

$mg = F_p = \rho V_0 g$ $\quad V_0$ - запремина потопљеног дела $V_0 < \frac{2}{3}R^3\pi$

Када се кугла наелектрише на површини диелектрика се индукују наелектрисања која узрокују привлачну силу између диелектрика и кугле па се центар кугле спусти!



$\boxed{m\vec g - \rho V \vec g + \vec F_e = 0}$ $\quad V = \frac{2}{3}R^3\pi$

Теорема импулса:

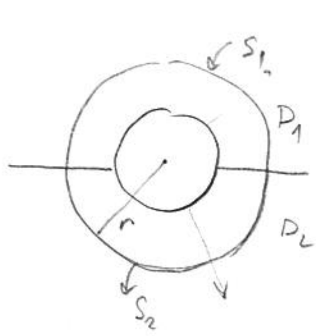
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_\alpha \vec p_\alpha + \int d^3\vec r\,(\vec D\times\vec B)\right] - \frac{1}{2}\int d^3\vec r\,(\varepsilon_0 \vec E^2 \nabla\varepsilon_r + \mu_0 \vec H^2 \nabla\mu_r) = \oint \hat T_M d\vec S = \vec F_e$$

$\hat T_M = |\vec E\rangle\langle\vec D| + |\vec H\rangle\langle\vec B| - \frac{1}{2}(\vec E\vec D + \vec H\vec B)\hat I$; $\vec g = \vec D\times\vec B$ - густина импулса ЕМ поља

$\vec F_e = \oint \hat T_M d\vec S$, треба нам $\vec E$ и $\vec D$ на граници кугле

$\vec E = E\cdot\vec e_r$; $\vec D = D\vec e_r = \begin{cases} D_1 \vec e_r, & \text{за } z>0 \\ D_2\vec e_r, & \text{за } z<0\end{cases}$

1° $\operatorname{div}\vec D = \rho^{sl+ext}$ $\quad /\int dV \quad \oint_{\partial V}\vec D\, d\vec S = \int_V \rho^{sl+ext} dV$



$\int_{z>0}\vec D_1 d\vec S + \int_{z<0}\vec D_2 d\vec S = q$

$2r^2\pi\cdot D_1 + 2r^2\pi D_2 = q \Rightarrow \boxed{D_1(r)+D_2(r) = \frac{q}{2r^2\pi}}$

2° Гр. услов $E_{T1}=E_{T2}$ на граничној равни $z=0$! $\vec e_r$ у xy равни

$\frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow D_2 = \varepsilon_r D_1$ $\quad D_1+\varepsilon_r D_1 = \frac{q}{2r^2\pi} \Rightarrow \boxed{D_1(r) = \frac{q}{(1+\varepsilon_r)2r^2\pi}}$

$\boxed{D_2(r) = \frac{\varepsilon_r q}{(1+\varepsilon_r)2r^2\pi}}$

$\vec F_e = \oint \hat T_M d\vec S = \int_\cap \hat T_{M1} d\vec S_1 + \int_\cup \hat T_{M2} d\vec S_2$

$r=R$ $\quad \hat T_{M1} d\vec S_1 = \vec E_1 \vec D_1\cdot d\vec S_1 - \frac{1}{2}\vec E_1\cdot\vec D_1\cdot d\vec S_1$, E, D и dS су дуж $\vec e_r$ $\Rightarrow \hat T_{M1} d\vec S_1 = \frac{1}{2}E_1 D_1 dS_1 \vec e_r$

Слично $\hat T_{M2} d\vec S_2 = \frac{1}{2}E_2 D_2 dS_2 \vec e_r$

$$\vec{F}_e = \int_0^{}\int_0^{} \frac{1}{2}\frac{D_1}{\varepsilon_0} D_1 \cdot \vec{e}_r \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} D_2 \vec{e}_r R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

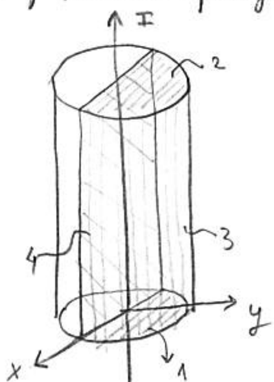
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(1+\varepsilon_r)2R^2\pi}\right)^2 (\vec{e}_z\cos\theta + \underbrace{\vec{e}_{r_c}\cdot\sin\theta}_{0}) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{\varepsilon_r q}{(1+\varepsilon_r)2R^2\pi}\right)^2 (\vec{e}_z\cos\theta + \underbrace{\vec{e}_{r_c}\sin\theta}_{0}) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}\varepsilon_0}\frac{q^2R^2}{(1+\varepsilon_r)^2 4R^4\pi^{\cancel{2}}}\vec{e}_z \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos\theta\sin\theta \, d\theta}_{\sin\theta \, d\sin\theta} + \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}\varepsilon_0\cancel{\varepsilon_r}}\frac{\varepsilon_r^{\cancel{2}} q^2 R^2}{(1+\varepsilon_r)^2 4R^4\pi^{\cancel{2}}}\vec{e}_z \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{q^2}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)^2 4R^2\pi}\vec{e}_z \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{q^2\varepsilon_r}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)^2 4R^2\pi}\vec{e}_z \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{q^2\vec{e}_z}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)^2 8R^2\pi}(1-\varepsilon_r) < 0$$

$$z \text{ оса} \quad -mg + \rho\frac{2}{3}R^3\pi g - \frac{q^2(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)^2 8R^2\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \pm\sqrt{\frac{8R^2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)^2}{(\varepsilon_r-1)}\left(\rho g\frac{2}{3}R^3\pi - mg\right)}}$$

Дуж осе бесконачног цилиндра полупречника R тече струја јачине I равномерно распоређена по пресеку цилиндра. Наћи силу по јединици дужине цилиндра којом међусобно интерагују две половине цилиндра: а) користећи Максвелов тензор напона б) директно рачунајући запреминске силе.



Рачунамо силу којом део цилиндра $y<0$ делује на део цилиндра $z>0$,

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \hat{T}_M d\vec{S} = \int_{S_1} \hat{T}_M d\vec{S} + \int_{S_2} \hat{T}_M d\vec{S} + \int_{S_3} \hat{T}_M d\vec{S} + \int_{S_4} \hat{T}_M d\vec{S} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i$$

$$\hat{T}_M = \underbrace{\varepsilon_0|\vec{E}\rangle\langle\vec{E}|}_{0} + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}\rangle\langle\vec{B}| - \left(\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2}_{0} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)\mathrm{I}$$, треба нам $\vec{B}$!

$$\boxed{\vec{j}(r) = \frac{I}{R^2\pi}\eta(R-r_c)\vec{e}_z}$$

Амперова теорема: цилиндар радијуса r коаксијалан са цилиндром кроз који тече струја: $\oint \vec{B}_> d\vec{l} = \mu_0 I$ за $r \geq R$ $\quad \vec{B}_> = B_>\vec{e}_\varphi \quad B_> 2r_c\pi = \mu_0 I$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_> = \frac{\mu_0 I}{2r_c\pi}\vec{e}_\varphi} \text{ за } r_c \geq R$$

$$\oint \vec{B}_< d\vec{l} = \mu_0 \int_0^{r}\int_0^{2\pi} \frac{I}{R^2\pi} r_c dr_c d\varphi = \mu_0\frac{I}{R^2\cancel{\pi}}\cdot\frac{r^2}{\cancel{2}}\cancel{2\pi} = \mu_0\frac{Ir^2}{R^2} = B_< 2r_c\pi \Rightarrow B_< = \frac{\mu_0 I r_c}{2\pi R^2}$$

$$\boxed{\vec{B}_< = \frac{\mu_0 I r_c}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi}, \text{ за } r_c < R$$

$$\vec{F}_1=\int\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_1\cdot(\underbrace{\vec{B}_1\cdot d\vec{S}_1}_{0})-\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}_1^{\,2}d\vec{S}_1\right)\qquad \vec{B}_1=B_1\vec{e}_\varphi\ ;\ d\vec{S}_1=dS_1(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_1=\int\left(-\frac{1}{2\mu_0}B_1^2\,dS_1(-\vec{e}_z)\right)$$

$$\vec{F}_2=\int\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2\,(\underbrace{\vec{B}_2\cdot d\vec{S}_2}_{0})-\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}_2^{\,2}\,d\vec{S}_2\right)\qquad \vec{B}_2=B_2\vec{e}_\varphi\ ,\ d\vec{S}_2=dS_2\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_2=\int\left(-\frac{1}{2\mu_0}B_2^2\,dS_2\,\vec{e}_z\right)\qquad B_1=B_2\ \ (B \text{ не зависи од } z)\ \ dS_1=dS_2\ !\Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$

$$d\vec{F}_3=\int\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_3\,(\underbrace{\vec{B}_3\cdot d\vec{S}_3}_{0})-\frac{1}{2\mu_0}B_3^2\,d\vec{S}_3\right)\qquad \vec{B}_3=B_3\vec{e}_\varphi\ ;\ d\vec{S}_3=dS_3\cdot\vec{e}_{r_c}$$

(пишем dF_3 јер је $\int dS_3$ „инфинит.")

$$d\vec{F}_3=-\frac{1}{2\mu_0}\int_0^{\pi}\int_z^{z+dz}\left(\frac{\mu_0 I}{2R\pi}\right)^2\vec{e}_{r_c}R\,d\varphi\,dz=-\frac{1}{2\mu_0}dz\int_0^{\pi}\left(\frac{\mu_0 I}{2R\pi}\right)^2R\left(\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\varphi\,\vec{e}_y\right)d\varphi$$

$$=-\frac{\cancel{\mu_0^2}I^2\cancel{R}}{2\cancel{\mu_0}4\cancel{R^2}\pi^2}dz\left(\underbrace{\sin\varphi\Big|_0^{\pi}}_{0}\vec{e}_x\underbrace{-\cos\varphi\,\vec{e}_y\Big|_0^{\pi}}_{=2\vec{e}_y}\right)=-\frac{\mu_0 I^2dz}{4R\pi^2}\vec{e}_y$$

$$d\vec{F}_4=\int\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_4(\vec{B}_4d\vec{S}_4)-\frac{1}{2\mu_0}B_4^2d\vec{S}_4\right)\qquad \vec{B}_4=\frac{\mu_0 I_0|x|}{2R^2\pi}\vec{e}_y\cdot\operatorname{sgn}x=\frac{\mu_0 I x}{2R^2\pi}\vec{e}_y\ ;\ d\vec{S}_4=dx\,dz(-\vec{e}_y)$$

$$d\vec{F}_4=\int_{-R}^{R}\int_z^{z+dz}\left[\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I x}{2R^2\pi}\right)^2(-\vec{e}_y)\cdot dx\,dz-\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I x}{2R^2\pi}\right)^2dx\,dz(-\vec{e}_y)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cancel{\mu_0}}dz(-\vec{e}_y)\frac{\cancel{\mu_0^2}I^2}{4R^4\pi^2}\int_{-R}^{R}x^2dx=-dz\frac{\mu_0 I^2}{8\cancel{R^4}\pi^2}\frac{\cancel{R^3}}{3}\cdot2\vec{e}_y=-\frac{\mu_0 I^2dz}{12R\pi^2}\vec{e}_y$$

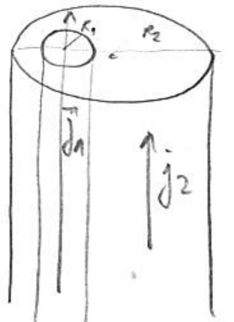
$$d\vec{F}=-\frac{\mu_0 I^2dz\,\vec{e}_y}{4R\pi^2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=-\frac{\mu_0 I^2dz\,\vec{e}_y}{3R\pi^2}\Rightarrow\boxed{\frac{d\vec{F}}{dz}=-\frac{\mu_0 I^2}{3R\pi^2}\vec{e}_y}$$

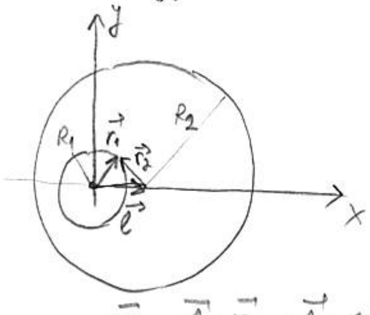
б) Запреминска сила $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$

$$d\vec{F}=\int_0^R\int_0^{\pi}\frac{I}{R^2\pi}\vec{e}_z\times\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi\,r\,dr\,d\varphi\cdot dz=\frac{\mu_0 I^2}{2R^4\pi^2}dz\int_0^R\int_0^{\pi}r^2(-\vec{e}_{r_c})\,dr\,d\varphi$$

$$=-\frac{\mu_0 I^2}{2R^{\cancel{4}}\pi^2}dz\,\frac{\cancel{R^3}}{3}\int_0^{\pi}(\underbrace{\cos\varphi}_{0}\vec{e}_x+\overbrace{\underbrace{\sin\varphi\,\vec{e}_y}_{-\cos\varphi|_0^{\pi}\vec{e}_y}}^{2})\,d\varphi=\boxed{-\frac{\mu_0 I^2}{3R\pi^2}dz\,\vec{e}_y}$$

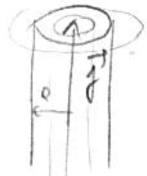
Цилиндар полупречника R_1 смештен је некоаксијално унутар другог цилиндра полупречника R_2 $(R_2 < R_1)$, тако да су осе цилиндара међусобно паралелне. Кроз цилиндре теку коаксијалне струје $\vec{j}_1$ и $\vec{j}_2$ и не мешају се при томе. Растојање између оса је l. Наћи силу по јединици дужине која делује на унутрашњи цилиндар.





$\vec{r}_1 = \vec{l} + \vec{r}_2$; $\vec{l} = l\vec{e}_x$

Тражимо магнетно поље цилиндра кроз који тече струја $\vec{j}$, полупр. цилиндра је R



$\vec{B} = B(r_c)\,\vec{e}_\varphi$

$\oint_{\partial S_<} \vec{B}_< \, d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_<} \vec{j}\, d\vec{S}$

$B_< \cdot 2 r_c \pi = \mu_0 j r_c^2 \pi$

$\Rightarrow B_< = \frac{\mu_0 j r_c}{2}$; $\boxed{\vec{B}_< = \frac{\mu_0 \vec{j} \times r_c \vec{e}_{r_c}}{2}}$

$\oint_{\partial S_>} \vec{B}_> \, d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_>} \vec{j}\, d\vec{S}$

$B_> \cdot 2 r_c \pi = \mu_0 j R^2 \pi$

$\Rightarrow B_> = \frac{\mu_0 j R^2}{2 r_c}$; $\vec{B}_> = \frac{\mu_0 R^2 \vec{j} \times \vec{e}_{r_c}}{2 r_c}$

Прво да израчунамо магнетно поље на границу мањег цилиндра

$\vec{B}_{гр} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

B_1 поље од струје $\vec{j}_1 - \vec{j}_2$ смештене у мањем цилиндру

B_2 поље од струје $\vec{j}_2$ смештене у целом већем цилиндру.

$$\vec{B}_{гр} = \frac{\mu_0(\vec{j}_1 - \vec{j}_2)\times\vec{r}_1}{2} + \frac{\mu_0 \vec{j}_2 \times \vec{r}_2}{2} = \frac{\mu_0 \vec{j}_1 \times \vec{r}_1}{2} + \frac{\mu_0 \vec{j}_2 \times \overbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}^{-l\vec{e}_x}}{2} = \boxed{\frac{\mu_0 j_1 R_1 \vec{e}_\varphi}{2} - \frac{\mu_0 j_2 l \vec{e}_y}{2}}$$

$$d\vec{F} = \int_{омотач} \hat{T}_M \, d\vec{S} = \int_{омот} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{гр} (\vec{B}_{гр} \, d\vec{S}) - \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B}_{гр})^2 d\vec{S} \right) \quad ; \; d\vec{S} = dz\, d\varphi\, R_1 \vec{e}_{r_c}$$

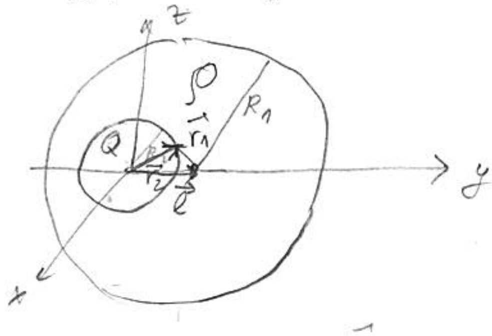
$$\frac{dF}{dz} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\cancel{\mu_0}} \left(\frac{\cancel{\mu_0} j_1 R_1 \vec{e}_\varphi}{2} - \frac{\mu_0 j_2 l \vec{e}_y}{2} \right) \left(\left(\frac{\mu_0 j_1 R_1 \vec{e}_\varphi}{2} - \frac{\mu_0 j_2 l \vec{e}_y}{2} \right) \cdot \vec{e}_{r_c} \right) R_1 d\varphi \right] \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{e}_{r_c} &= \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 j_1 R_1 \vec{e}_\varphi}{2} - \frac{\mu_0 j_2 l \vec{e}_y}{2} \right)^2 \cdot d\varphi R_1 \vec{e}_{r_c}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{j_1 R_1 (-\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y)}{2} - \frac{j_2 l \vec{e}_y}{2} \right) \left(-\frac{\mu_0 j_2 l}{2} \sin\varphi \right) R_1 - \frac{\mu_0}{8} \left(j_1^2 R_1^2 + j_2^2 l^2 - 2 j_1 j_2 l R_1 \cos\varphi \right) R_1 (\cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y) \right] d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\frac{\mu_0 j_1 j_2 l R_1^2}{8} \vec{e}_x + \frac{\mu_0 j_1 j_2 l R_1^2}{8} \vec{e}_x \right) = \boxed{\frac{\mu_0 j_1 j_2 R_1^2 \vec{l} \pi}{2}}$$

Лопта полупречника R_1 у себи садржи лопту полупречника R_2 ексцентрично постављену тако да је растојање између центара једнако l. Обе лопте су равномерно наелектрисане, прва густином наелектрисања ρ, а друга наелектрисањем Q. Наћи силу којом мала лопта делује на велику, ако су наелектрисања истоимена.



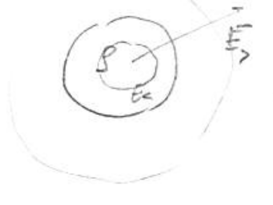
Тражимо електрично поље система:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$\vec{E}_1$ поље од пуне велике кугле

$\vec{E}_2$ - поље од мале кугле

$\vec{E}_3$ - поље од мале наелектрисане са $-\rho$



$$\oint \vec{E}_> d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}R^3\pi}{\varepsilon_0}$$

$$E_> = \frac{1}{4r^2\pi\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}R^3\pi = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_< \cdot 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\cdot\frac{4}{3}r^3\pi \Rightarrow E_< = \frac{\rho\cdot r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E}\Big|_{\substack{\text{граница мале сф}\\ \equiv\partial S}} = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e}_r - \frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e}_r + \frac{\rho(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{l} = l\vec{e}_y \;;\quad \boxed{\vec{E}\Big|_{\text{граница мале сф}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e}_r - \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}}$$

$$\vec{F} = \oint \hat{T}_M d\vec{S} = \int_{\partial S}\left(\varepsilon_0\vec{E}(\vec{E}\cdot d\vec{S}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\vec{S}\right) \;;\; \boxed{d\vec{S} = R_2^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\vec{e}_r}$$

$$= \iint\left\{\left(\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\vec{e}_r - \varepsilon_0\frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}\right)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} - \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}\sin\theta\sin\varphi\right) - \vec{e}_r\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\right)^2 + \frac{\rho^2 l^2}{9\varepsilon_0^2} - \frac{2Q\rho l}{12\pi\varepsilon_0^2 R_2^2}\sin\theta\sin\varphi\right]\right\} R_2^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\vec{e}_r\left(\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\right)^2 - \cancel{\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\frac{\rho l}{3\varepsilon_0}\sin\theta\sin\varphi} - \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho^2 l^2}{9\varepsilon_0^2} + \cancel{\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\frac{\rho l}{3\varepsilon_0}\sin\theta\sin\varphi}\right) - \frac{\rho\vec{l}}{3}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} - \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}\overset{\to 0}{\sin\theta\sin\varphi}\right)\right\} R_2^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

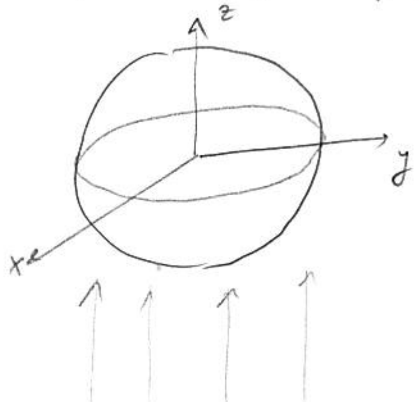
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{e}_z\cos\theta\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho^2 l^2}{9\varepsilon_0^2}\right)R_2^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \overset{\to 0}{} - \frac{\rho\vec{l}}{3}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\sin\theta = 0$$

$$= -\frac{\rho Q\vec{l}}{12\pi\varepsilon_0}2\pi\cdot 2 = \boxed{-\frac{\rho Q}{3\varepsilon_0}\vec{l}}$$ сила којом већа делује на мању

$$\boxed{\vec{F}' = -\vec{F} = \frac{\rho Q}{3\varepsilon_0}\vec{l}}$$ сила којом мања делује на већу

Раван монохроматски EM талас задат потенцијалима $\varphi=0$, $A=A_0\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)$, $(\mathrm{div}\,\vec{A}=0)$, пада на површину непокретне лопте полупречника R и потпуно се апсорбује. Таласна дужина је мала у поређењу са R, па је иза лопте сенка. Одредити силу $\vec{F}$ која делује на лопту усредњену по периоду.



$$\varphi=0\ ;\ \vec{A}=\vec{A}_0\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A}= A_{0x}\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\cdot k_x + A_{0y}\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\,k_y + A_{0z}\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\,k_z$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A}=\vec{k}\vec{A}_0\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{k}\cdot\vec{A}_0=0}$$

Нека је $\vec{k}=k_z\vec{e}_z$ (на крају резултат пишемо преко целог $\vec{k}$!)

$\Rightarrow\ A_{0z}=0$ нека је $\vec{A}_0=A_{0x}\vec{e}_x$!

$$\vec{F}=\oint_{\partial S}\hat{T}_M\,d\vec{S}$$ интеграл по доњој полусфери јер је иза сенка; нема члана $-\frac{d}{dt}\int d^3r\,(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B})$ јер је $\vec{E}=0=\vec{B}$ унутар кугле!

$$\hat{T}_M=\varepsilon|E\rangle\langle E|+\frac{1}{\mu_0}|B\rangle\langle B|-\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\hat{I}-\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\hat{I}$$

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=+\vec{A}_0\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\cdot\omega$$

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}=\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k\,\vec{e}_i=\varepsilon_{ijk}A_{0k}\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\,k_j\,\vec{e}_i$$
$$=\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\ \vec{k}\times\vec{A}_0$$

конкретно:
$$\vec{E}=A_{0x}\,\omega\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)$$
$$\vec{B}=\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\ k_z A_{0x}\vec{e}_y$$

$$\vec{F}=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\left(\varepsilon_0\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{e}_r)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{B}\vec{e}_r)-\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\vec{e}_r-\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\vec{e}_r\right)$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\Big(\varepsilon_0\,\omega\vec{A}_0\sin^2(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\,\omega A_{0x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{1}{\mu_0}\sin^2(\omega t-\overset{kr\cos\theta}{\vec{k}\vec{r}}+\alpha)\,\vec{k}\times\vec{A}_0\,k_z A_{0x}\sin\theta\sin\varphi$$
$$-\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{A}_0^2\omega^2+\frac{1}{2\mu_0}(\vec{k}\times\vec{A}_0)^2\right)\sin^2(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\,\vec{e}_r\Big)$$

$$\langle\vec{F}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{F}\,dt=\qquad\langle\sin^2(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\alpha)\rangle=\frac{1}{2}$$

$$\langle\vec{F}\rangle=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{A}_0^2\omega^2+\frac{1}{2\mu_0}(\vec{k}\times\vec{A}_0)^2\right)(\cos\theta\,\vec{e}_z+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y+\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x)R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\langle\vec{F}\rangle=-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{A}_0^2\omega^2+\frac{1}{2\mu_0}(\vec{k}\times\vec{A}_0)^2\right)R^2\ \underbrace{\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{-1/2}\vec{e}_z=\frac{\pi}{4}\Big(\varepsilon_0\underbrace{\omega^2}_{c^2k^2}\vec{A}_0^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{k}^2\vec{A}_0^2\Big)\underbrace{\vec{e}_z}_{\vec{k}/|\vec{k}|}$$

таласна јна $\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0\ \Rightarrow\ \vec{k}^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0\ \Rightarrow\ \langle\vec{F}\rangle=\boxed{\frac{\pi}{2\mu_0}|\vec{A}_0|^2|\vec{k}|\,\vec{k}\,R^2}$

Сфера радијуса R наелектрисана је равномерно површинским наелектрисањем Q. Сфера је окружена течним диелектриком диелектричне пропустљивости ε и сталне густине. Флуид садржи слободна наелектрисања са $\rho = -k\phi(\vec{r})$, где је k константа, а $\phi(\vec{r})$ електрични потенцијал. Наћи $\phi(\vec{r})$ у целом простору, као и притисак као фју $\vec{r}$ у диелектрику.

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho^{sl} \Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \rho^{sl} \quad \operatorname{div}(-\varepsilon\,\operatorname{grad}\phi) = \rho^{sl}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi = -\frac{\rho^{sl}}{\varepsilon} = \frac{k}{\varepsilon}\phi$$

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\phi}{dr} = \frac{k}{\varepsilon}\phi \qquad \text{смена } \phi = \frac{u}{r}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(ru' - u) = \frac{1}{r^2}(\cancel{u'} + ru'' - \cancel{u'})$$

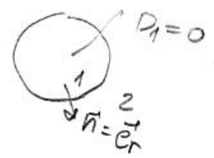
$$\frac{1}{\cancel{r}}u'' = \frac{k}{\varepsilon}\frac{u}{\cancel{r}} \qquad u'' - \frac{k}{\varepsilon}u = 0 \qquad u \sim e^{\alpha r}$$

$$\alpha^2 - \frac{k}{\varepsilon} = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{k}{\varepsilon}$$

$$\underline{k > 0} \qquad \alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}} \qquad \phi = \cancel{\frac{A}{r}e^{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r}} + \frac{B}{r}e^{-\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r}$$

0 да не буде $\rho \to \infty$ у бесконачности!

B одређујемо из граничног услова $D_{2n} - \underset{0}{D_{1n}}\Big|_{r=R} = \sigma = \frac{Q}{4R^2\pi}$



$$D_{2n}\Big|_R = \varepsilon E_{2n}\Big|_R = -\varepsilon\,\operatorname{grad}\phi\Big|_R = \frac{Q}{4R^2\pi}$$

$$\frac{Q}{4R^2\pi} = -\varepsilon\frac{d\phi}{dr}\Big|_R = -\varepsilon B\left(-\frac{1}{R^2}e^{-\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R} - \frac{1}{R}e^{-\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\right) = \varepsilon B e^{-\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}\frac{1 + R\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}}{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}}{1 + R\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}}{1 + \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}\frac{1}{r}e^{-\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r}}$$

Навије-Стоксова јна $\quad \rho_m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p = 0 \quad$ за мирујући флуид

$$\vec{f} = \nabla p$$

$$\vec{F} = \int\vec{f}\,d^3\vec{r} = \oint\underline{\hat{T}_M\vec{n}\,dS} = \int\nabla p\,d^3\vec{r} = \int\partial_i p\cdot\vec{e}_i\,d^3\vec{r} = \oint p\,\vec{e}_i\,dS_i$$

$$= \oint p\,d\vec{S}$$

$$= \oint\underline{p\vec{n}\,dS}$$

$$\boxed{\hat{T}_M\vec{n} = p\vec{n}} \qquad \vec{n} = \vec{e}_r$$

$$\hat{T}_M = |\vec{E}\rangle\langle\vec{D}| - \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$$

$$\hat{T}_M \vec{e}_r = \vec{E}(\vec{D}\vec{e}_r) - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})\vec{e}_r$$

$$= -\nabla\phi(-\varepsilon\nabla\phi\,\vec{e}_r) - \frac{1}{2}\varepsilon(\nabla\phi)^2\vec{e}_r = \varepsilon\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\vec{e}_r - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\vec{e}_r$$

$$\hat{T}_M \vec{e}_r = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2\vec{e}_r \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2}$$

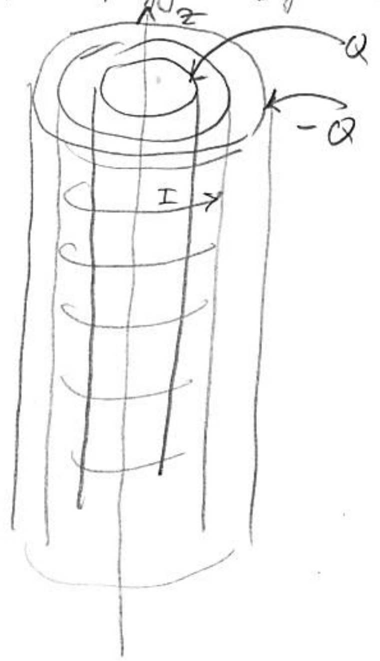
$$\phi = \frac{B}{r}e^{-\overbrace{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}}^{\alpha}r} = \frac{B}{r}e^{-\alpha r}$$

$$P = \frac{1}{2}\varepsilon B^2\left(\frac{-\alpha r - 1}{r^2}e^{-\alpha r}\right)^2$$

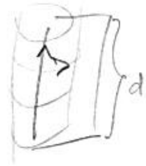
$$P = \frac{1}{2}\varepsilon B^2\left(\frac{\alpha r + 1}{r^2}\right)^2 e^{-2\alpha r} \qquad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q e^{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}R}}{4\pi\varepsilon\left(R\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}+1\right)}\right)^2\left(\frac{\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r+1}{r^2}\right)^2 e^{-2\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}r}}$$

Соленоид радијуса R има n навојака по јединици дужине. Струја у соленоиду је I. Два шупља цилиндра дужине l су постављена коаксијално са соленоидом. Унутрашњи јест је радијуса a $(a<R)$ и његово наелектрисање је Q (равномерно распоређено). Спољни цилиндар носи наелектрисање $-Q$ и радијус му је b $(b>R)$. Ако се струја искључи цилиндри почну да ротирају. Одакле им угаони момент?



Док је укључена струја



$$B \cdot d = \mu_0 \, d \cdot n \cdot I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 I n \vec{e}_z, & r<R \\ 0, & r>R \end{cases}$$

за $r<a$ $\quad E_{r<a} = 0$

за $a<r<b$ $\quad E \cdot 2r\pi \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad E_{a<r<b} = \frac{Q}{2r\pi\varepsilon_0 l}$

за $r>b$ $\quad E_{r>b} = 0$

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} 0, & r<a \\ \frac{Q}{2r\pi\varepsilon_0 l}\vec{e}_r, & a<r<b \\ 0, & r>b \end{cases}$$

Када се струја искључује $I = I(t)$ јави се вртложно ел. поље:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Big/ \int d\vec{S} \qquad \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} d\vec{S}$$ (3. Максвелова ј'на)

за $r<R$ $\quad E \cdot 2r\pi = -\frac{d}{dt}(\mu_0 n I \cdot r^2\pi) = -\mu_0 n \dot{I} r^2 \pi$

$$\vec{E}_{r<R} = -\frac{\mu_0 n \dot{I}}{2} r \vec{e}_\varphi$$

за $r>R$ $\quad E \cdot 2r\pi = -\mu_0 n \dot{I} R^2 \pi \qquad \vec{E}_{r>R} = -\frac{\mu_0 n \dot{I} R^2}{2r}\vec{e}_\varphi$

← промењиво поље!

$$\vec{M}_a = \int \vec{r} \times d\vec{F}_a = \int \vec{r} \times \sigma_a dS(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi} \frac{Q}{2a\pi l} dz \cdot a d\varphi \, (a\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times (E\vec{e}_\varphi + v\vec{e}_\varphi \times B\vec{e}_z)$$

$$= \frac{Q}{2a\pi l} a \int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi} dz \, d\varphi \, (aE\vec{e}_z - zE\vec{e}_r) = \frac{Q}{2\pi l} l a \left(-\frac{\mu_0 n \dot{I}}{2} a\right) 2\pi \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_a = -\frac{\mu_0 n \dot{I} a^2 Q}{2}\vec{e}_z$$

$$\vec M_b = \int \vec r \times d\vec F_b = \int_{-l/2}^{l/2}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-Q}{2b\pi l}\, dz\, b\, d\varphi}_{\sigma_b dS} \left(b\vec e_{r_c} + \cancel{z\vec e_z}^{\,0}\right) \times \left(-\frac{\mu_0 n \dot I R^2}{2b}\vec e_\varphi\right)$$

$$\vec e_z \times \vec e_\varphi = -\vec e_{r_c}$$

$$= \frac{Q}{\cancel{2\pi b l}}\, b\, \frac{\mu_0 n \dot I R^2}{2b}\vec e_z\, \cancel{l\cdot 2\pi b} = \frac{Q\mu_0 n \dot I R^2}{2}\vec e_z$$

$$\vec M_a = \frac{d\vec L_a}{dt} \Rightarrow \vec L_a(t) - \cancel{\vec L_a(0)}^{\,0} = \int_0^t \vec M_a\, dt = -\frac{Q\mu_0 n a^2}{2}\vec e_z\left(\cancel{I(t)}^{\,0} - I(0)\right)$$

$$\vec L_a = \frac{QI\mu_0 n a^2}{2}\vec e_z$$

$$\vec M_b = \frac{d\vec L_b}{dt} \Rightarrow \vec L_b(t) - \cancel{\vec L_b(0)}^{\,0} = \int_0^t \vec M_b\, dt = \frac{Q\mu_0 n R^2}{2}\vec e_z\left(I(t) - I\right)$$

$$\vec L_b = -\frac{QI\mu_0 n R^2}{2}$$

На почетку момент импулса поља:

$$\vec L_{поља} = \int \vec r \times \vec g\, dV = \int \vec r \times \frac{\vec S_p}{c^2}\, dV$$

$$= \int \left(\vec r \times \frac{\vec E \times \vec B}{c^2\mu_0}\right) dV = \int_{-l/2}^{l/2}\int_a^R\int (r_c\vec e_{r_c} + z\vec e_z)\times\frac{1}{c^2\mu_0}\left(E\vec e_{r_c}\times B\vec e_z\right) dz\, r_c\, dr_c\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{c^2\mu_0}\int_{-l/2}^{l/2}\int_a^R\int_0^{2\pi}\left(r_c\vec e_{r_c} \times \cancel{z\vec e_z}\right)\frac{Q}{2\cancel{r_c}\pi\varepsilon_0 l}\cdot\mu_0 I n\left(-\vec e_\varphi\right) dz\, \cancel{r_c}\, dr_c\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{c^2\cancel{\mu_0}}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\cancel{\mu_0} I n \int_{-l/2}^{l/2}\int_a^R\int_0^{2\pi} r_c\, dz\, dr_c\, d\varphi\, \vec e_z$$

$$= -\frac{\mu_0}{\cancel{2\pi l}} Q I n \cancel{l}\, \frac{R^2-a^2}{2}\cancel{2\pi}\,\vec e_z = -\frac{\mu_0 QInR^2}{2}\vec e_z + \frac{\mu_0 QIna^2}{2}\vec e_z$$

$$\boxed{\vec L_{поља} = \vec L_a + \vec L_b}$$